Trägheitsmoment

Physikalische Größe	
Name	**Trägheitsmoment**
Formelzeichen der Größe	*I*, *J*, Θ

Größen- und Einheiten-system	Einheit	Dimension
SI	kg·m^2	M·L^2

Siehe auch: Trägheitstensor

Das **Trägheitsmoment**, auch *Massenträgheitsmoment* oder *Inertialmoment*, ist eine physikalische Größe in der klassischen Mechanik. Sie gibt den Widerstand eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsbewegung an.

Man verwendet das Trägheitsmoment in Formeln zur Beschreibung von Drehbewegungen von starren Körpern. Im Vergleich zu den Formeln für geradlinige Bewegungen übernimmt es in diesen die Rolle der Masse. Beispielsweise lautet die Bewegungsgleichung für Drehbewegungen $M = J \cdot \dot{\omega}$ mit dem Drehmoment M (die Kraft multipliziert mit der Entfernung von der Drehachse), dem Trägheitsmoment J und der Ableitung der Winkelgeschwindigkeit ω (Zahl der Umdrehungen pro Sekunde multipliziert mit 2π). Diese Gleichung hat damit die gleiche Form wie die Newtonsche Gleichung für die Kraft $F = m \cdot \dot{v}$, in der m für die Masse und v für die Geschwindigkeit eines Körpers steht. Deswegen ist in der älteren Literatur auch die Bezeichnung **Drehmasse** für das Trägheitsmoment gebräuchlich.

Das Trägheitsmoment eines Körpers hängt von seiner Form, der Massenverteilung und zusätzlich noch von der Drehachse ab. Zur vollständigen Beschreibung des Trägheitsverhaltens eines starren Körpers reicht deshalb eine einzelne Zahl nicht aus; man verwendet dafür den Trägheitstensor. Das Trägheitsmoment für jede beliebige Achse kann dann aus dem Trägheitstensor berechnet werden. Wird ein Koordinatensystem gewählt, in dem die Drehachse mit einer der Koordinatenachsen zusammenfällt, so ist das Trägheitsmoment mit dem zugehörigen Diagonalelement des Trägheitstensors identisch.

Bedeutung

Werden Körper mit verschiedener Massenverteilung z. B. zwei Kugeln *gleicher* Masse aber unterschiedlichen Durchmessers – etwa aus Holz und aus Blei – zum Rotieren gebracht, wird ihre Massenverteilung um die Drehachse entscheidend. Je weiter die Masseteilchen von der Drehachse entfernt sind, desto größer ist, aufgrund des Hebelgesetzes, das benötigte Drehmoment um beide Kugeln innerhalb einer bestimmten Zeit in eine Drehung mit gleicher Frequenz zu versetzen. Für den Körper als Summe seiner Massepunkte folgt: Für die, bei gleicher Masse natürlich größere, Holzkugel ist das größere Drehmoment nötig. Die Trägheit, die die Kugeln der Winkelgeschwindigkeitsänderung entgegensetzen, wird durch das Trägheitsmoment beschrieben.

Beispiele: Drehstuhl, Pirouette

Mit einem einfachen Experiment kann man eine Änderung des Trägheitsmoments bei gleich bleibendem Drehimpuls veranschaulichen. Man setzt sich (möglichst zentrisch) auf einen Drehstuhl (ein üblicher Schreibtischsessel erfüllt denselben Zweck) und versetzt sich in Drehung, Arme und Beine ausgestreckt. Wenn man dann die Arme und Beine an den Körper heranzieht, nimmt das Trägheitsmoment ab – mit der Folge, dass die Drehbewegung schneller wird, weil der Drehimpuls erhalten werden muss (abgesehen von Reibungseinflüssen; siehe Drehimpulserhaltung). Erneutes Ausstrecken verlangsamt die Bewegung wieder. Um den Effekt zu verstärken, kann man in jede Hand schwere Gegenstände nehmen, etwa Hanteln. Je größer deren Masse, desto deutlicher wird der Effekt.

Ein ähnliches Beispiel ist der Pirouetteneffekt, der aus dem Eiskunstlaufen bekannt ist. Die Kontrolle der Drehgeschwindigkeit kann allein aus der Verlagerung der Körpermasse aus der Drehachse erfolgen. Zieht der Eiskunstläufer die Arme an oder richtet sich aus einer Hockerstellung gerade auf, so dreht er sich schneller – ein erneutes Schwung holen ist nicht nötig.

Formelzeichen, Einheit und Geschichte

Die geläufigsten Formelzeichen für das Trägheitsmoment sind J und I, zurückgehend auf das lateinische Wort *iners*, das untätig und träge bedeutet. Da beide Symbole aber auch in der Elektrotechnik Verwendung finden, ist weiterhin ein Θ (großes Theta) gebräuchlich. In diesem Artikel wird durchgehend J verwendet.

Die SI-Einheit des Trägheitsmoments ist [kg m^2].

Das Trägheitsmoment wurde erstmals 1730 von Leonhard Euler in seinem Buch "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum" verwendet.

Berechnung

Massenverteilung

Bezogen auf einen Körper lautet dessen gesamte kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2$$

Durch die Darstellung der Bahngeschwindigkeit über die Winkelgeschwindigkeit erhält man die kinetische Energie der Rotation:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

Somit berechnet sich das Trägheitsmoment einzelner Massenpunkte mit der Summe:

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

mit m_i für die Masse und r_i für den senkrechten Abstand des i -ten Teilchens von der Drehachse. Ist die Drehachse die x -Achse, so lautet das zugehörige Trägheitsmoment

$$J_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

und nach dem Übergang zum Integral mit dem Volumen V des aus den Massenpunkten zusammengesetzten Körpers:

$$J = \int_V r^2 \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V$$

$\rho(\vec{r})$ ist die vom Ortsvektor abhängige Dichte.

Bei einer homogenen Masseverteilung ist die Dichte konstant und die Rechnung vereinfacht sich zu: $J = \rho \int_V r^2 \,\mathrm{d}V$ Weiter unten ist eine Beispielrechnung angegeben.

Das Trägheitsmoment rotationssymmetrischer Körper, die um ihre Symmetrieachse (z-Achse) rotieren, kann einfach mit Hilfe von Zylinderkoordinaten berechnet werden. Dazu muss entweder die Höhe als Funktion des Radius ($h = h(r)$) oder der Radius als Funktion der z-Koordinate ($r = r(z)$) bekannt sein. Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten ergibt sich zu $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$. Die Integrationen über φ und z bzw. über φ und r sind leicht auszuführen und man erhält:

$$J = 2\pi\rho \int r^3\, h(r)\,\mathrm{d}r \quad \text{bzw.} \quad J = \frac{1}{2}\pi\rho \int r(z)^4\,\mathrm{d}z$$

Trägheitsmoment bezüglich zueinander paralleler Achsen

Ist das Trägheitsmoment J_S für eine Achse durch den Schwerpunkt eines Körpers bekannt, so kann mit Hilfe des steinerschen Satzes das Trägheitsmoment J_P für eine beliebige parallel verschobene Drehachse berechnet werden. Die Formel lautet:

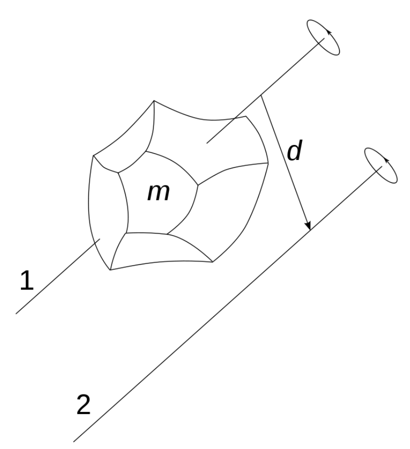


Illustration der Steiner-Regel. Drehachse 1 geht durch den Schwerpunkt des Körpers der Masse *m*. Drehachse 2 ist um den Abstand *d* verschoben.

$$J_\mathrm{P} = J_\mathrm{S} + md^2$$

Dabei gibt d den Abstand der Achse durch den Schwerpunkt zur parallel verschobenen Drehachse an.

Man kann die Steiner-Regel für zwei beliebige parallele Drehachsen verallgemeinern. Dazu muss die Steiner-Regel zweimal hintereinander angewendet werden: Zunächst verschiebe man die Drehachse so, dass sie durch den Schwerpunkt des Körpers geht, danach auf den gewünschten Zielort.

$$J_\mathrm{neu} = J_\mathrm{alt} + m\left(d_\mathrm{neu}^2 - d_\mathrm{alt}^2\right)$$

Trägheitstensor

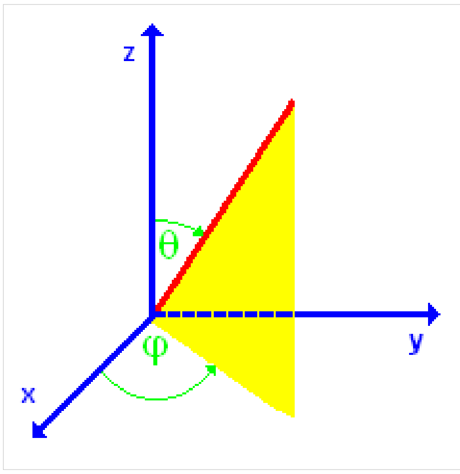
Der Trägheitstensor I_{xy} eines Körpers ist eine Verallgemeinerung des Trägheitsmomentes. In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich der Trägheitstensor als Matrix darstellen, die sich aus den Trägheitsmomenten bezüglich der drei Koordinatenachsen und den Deviationsmomenten zusammensetzt. Die drei Trägheitsmomente bilden die Diagonale der Matrix, die Deviationsmomente sind die Nebendiagonalelemente. Mit Hilfe des Trägheitstensor lässt sich z. B. das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen, durch den Schwerpunkt gehenden Achse berechnen. Wenn ein starrer Körper um eine solche Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert, so ergibt sich das Trägheitsmoment zu

$$J = \frac{1}{\omega^2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\; \omega_i\; \omega_j$$

oder in Matrixschreibweise

$$J = \frac{1}{\omega^2}\vec{\omega}^T \cdot I \cdot \vec{\omega}$$

Drehung des Koordinatensystems



Eine Achse in beliebiger Raumrichtung wird beschrieben durch den Einheitsvektor $\vec{e}$. Man kann diesen z. B. dadurch erhalten, dass man den Einheitsvektor in z-Richtung mittels einer Drehmatrix *R* dreht: $\vec{e} = R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot \cos\vartheta & -\sin\varphi & \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ \sin\varphi \cdot \cos\vartheta & \cos\varphi & \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ erhält man $\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

Mit Hilfe dieser Drehmatrix kann nun der Trägheitstensor in ein Koordinatensystem transformiert werden, in dem die z-Achse in Richtung der Rotationsachse zeigt:

$$I' = R^T \cdot I \cdot R$$

Das Trägheitsmoment für die neue z-Achse ist jetzt einfach das 3. Diagonalelement des Tensors in der neuen Darstellung. Nach Ausführung der Matrizenmultiplikation und trigonometrischen Umformungen ergibt sich

$$J = (I_{xx}\cos^2\varphi + I_{yy}\sin^2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi)\sin^2\vartheta + I_{zz}\cos^2\vartheta + (I_{yz}\sin\varphi + I_{zx}\cos\varphi)\sin 2\vartheta$$

Beispielrechnung: Rotationssymmetrischer Körper

Wir betrachten als Beispiel dazu den Trägheitstensor eines rotationssymmetrischen Körpers. Wenn eine der Koordinatenachsen (hier die z-Achse) mit der Symmetrieachse zusammenfällt, dann ist dieser Tensor diagonal. Die Trägheitsmomente für Rotation um die x-Achse und die y-Achse sind gleich ($I_{xx} = I_{yy} = J_1$). Für die z-Achse kann das Trägheitsmoment verschieden sein ($I_{zz} = J_2$). Der Trägheitstensor hat damit folgende Gestalt:

$$I = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

Transformiert man diesen Tensor wie oben beschrieben in ein Koordinatensystem, das um den Winkel ϑ um die y-Achse gedreht ist, so erhält man:

$$I' = \begin{pmatrix} J_1\cos^2\vartheta + J_2\sin^2\vartheta & 0 & (J_1 - J_2)\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 0 & J_1 & 0 \\ (J_1 - J_2)\sin\vartheta\cos\vartheta & 0 & J_1\sin^2\vartheta + J_2\cos^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich:

1. Für $J_1 \neq J_2$ sind die Trägheitsmomente für die x- und z-Achse von ϑ abhängig.
2. Für $J_1 \neq J_2$ ist der Trägheitstensor nicht mehr diagonal, es treten Deviationsmomente auf.
3. Das Trägheitsmoment für die neue z-Achse ist: $J = J_1 \sin^2 \vartheta + J_2 \cos^2 \vartheta$
4. Für $J_1 = J_2$ hängt wegen $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$ das Trägheitsmoment nicht von der Richtung der Drehachse ab

Besondere Trägheitsmomente

Hauptträgheitsmoment

Betrachtet man einen unregelmäßig geformten Körper, der um eine Achse durch seinen Schwerpunkt rotiert, so variiert dessen Trägheitsmoment je nach Lage der Drehachse. Dabei gibt es zwei Achsen, bezüglich derer das Trägheitsmoment des Körpers maximal bzw. minimal ist. Diese Achsen stehen immer senkrecht zueinander und bilden zusammen mit einer dritten, wiederum senkrecht auf beiden stehenden Achse die *Hauptträgheitsachsen* des Körpers. In einem von den Hauptträgheitsachsen aufgespannten Koordinatensystem ist der Trägheitstensor diagonal. Die zu den Hauptträgheitsachsen gehörenden Trägheitsmomente sind also die Eigenwerte des Trägheitstensors, sie heißen *Hauptträgheitsmomente*.

Die Hauptträgheitsachsen fallen mit eventuell vorhandenen Symmetrieachsen des Körpers zusammen. Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß, so sind alle Drehachsen in der Ebene, die von den zugehörigen Hauptträgheitsachsen aufgespannt wird, ebenfalls Hauptträgheitsachsen mit dem gleichen Trägheitsmoment. Das ist bei zylindersymmetrischen Körpern unmittelbar klar, gilt aber z. B. ebenso für einen Stab mit quadratischer oder hexagonaler Grundfläche. Für den Fall, dass alle Hauptträgheitsmomente identisch sind, ist, wie oben gezeigt wurde, jede Drehachse durch den Schwerpunkt eine Hauptträgheitsachse mit dem gleichen Trägheitsmoment. Für alle regelmäßigen Körper wie Kugel, Tetraeder, Würfel, usw. ist demnach das Trägheitsmoment für jede Achse durch den Schwerpunkt gleich groß.

Siehe auch: Trägheitsellipsoid

Trägheitsmoment zur eingespannten Achse

Wenn ein starrer Körper um eine fest eingespannte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert (die Richtung des Vektors $\vec{\omega}$ ist die Richtung der Drehachse), so lässt sich der Drehimpuls $\vec{L}$ aus $\vec{L} = I\vec{\omega}$ berechnen. Dabei ist I der Trägheitstensor. Im Allgemeinen hat der Drehimpuls $\vec{L}$ jetzt nicht die Richtung der Drehachse $\vec{\omega}$ und ist zeitlich nicht konstant, so dass die Lager ständig Drehmomente aufbringen müssen (Dynamische Unwucht). Nur bei Rotation um eine der Hauptträgheitsachsen ist $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.
Für die Drehimpuls*komponente* L entlang der Drehachse gilt $L = J\omega$, dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit und J das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse $\vec{\omega}$. Die kinetische Energie der Rotation, auch kurz als *Rotationsenergie* bezeichnet, kann durch

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{L^2}{2J}$$

ausgedrückt werden. Diese Formeln zeigen die Analogie zu den entsprechenden Formeln für Impuls und kinetische Energie der Translationsbewegung.

Beispiele

Trägheitsmomente von Himmelskörpern

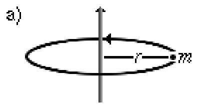
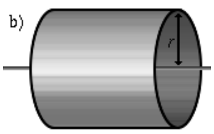
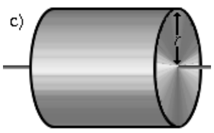
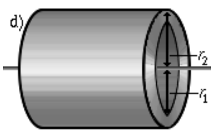
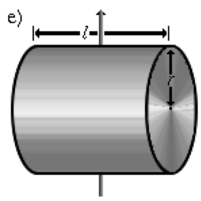
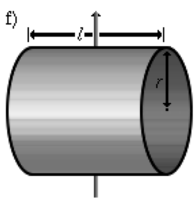
Fast alle größeren Körper im Weltall (Sterne, Planeten) sind angenähert kugelförmig und rotieren mehr oder weniger schnell. Das Trägheitsmoment um die Rotationsachse ist immer das größte des Himmelskörpers.

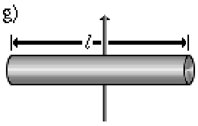
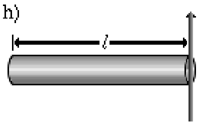
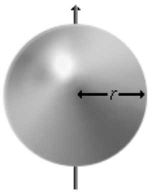
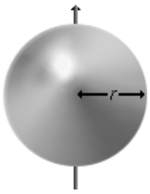
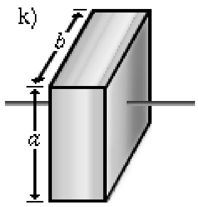
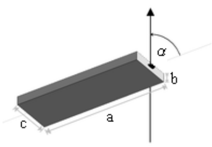
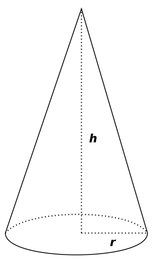
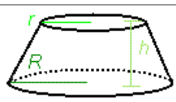
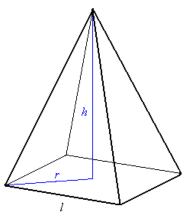
Die Differenz dieses „polaren“ und des äquatorialen Trägheitmoments hängt mit der Abplattung des Körpers zusammen, also seiner Verformung der reinen Kugelgestalt durch die Fliehkraft der Rotation. Bei der Erde liegt diese Differenz bei 0,3 Prozent, entspricht also fast der Erdabplattung von 1:298,24. Beim rasch rotierenden Jupiter sind diese Relativwerte rund 20-mal größer.

Das Trägheitsmoment eines Himmelskörpers lässt wegen ***r*²** im obigen Integral auf die innere Konzentration seiner Masse schließen. Jenes der Erde ist kleiner, als wenn sie homogen aufgebaut wäre, nämlich etwa 0,33 m r^2, statt 0,4 m r^2.[1] Daraus kann man errechnen, dass der Erdkern aus Eisen (oder metallisch verdichtetem Wasserstoff) besteht.

Hauptträgheitsmomente einfacher geometrischer Körper

Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, liegt der Schwerpunkt der geometrischen Körper auf der Drehachse auf die sich das Trägheitsmoment bezieht. m ist die Masse des rotierenden Körpers. Das Trägheitsmoment für Drehungen um andere Achsen kann man dann mit Hilfe des Satzes von Steiner berechnen.

Abbildung	Beschreibung	Trägheitsmoment
	Eine Punktmasse im Abstand r um eine Drehachse.	$J = m \cdot r^2$
	Ein Zylindermantel, der um seine Symmetrieachse rotiert, für eine Wandstärke $d \ll r$.	$J = m \cdot r^2$
	Ein Vollzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
	Ein Hohlzylinder, der um seine Körperachse rotiert. Schließt die vorgenannten Grenzfälle Zylindermantel und Vollzylinder mit ein.	$J = \frac{1}{2} m \cdot ({r_2}^2 + {r_1}^2)$
	Ein Vollzylinder, der um eine Achse rotiert, die senkrecht zur Symmetrieachse steht, und durch seinen Schwerpunkt geht.	$J = \frac{1}{4} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$
	Ein Zylindermantel der senkrecht zu seiner Körperachse rotiert.	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$

g) 	Ein dünner Stab, der senkrecht zur Symmetrieachse rotiert. Diese Formel ist eine Näherung für einen Zylinder mit $r \ll l$.	$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
h) 	Dünner Stab, der senkrecht zu seiner Körperachse um ein Ende rotiert. Diese Formel ist die Anwendung der Steiner-Regel auf den dünnen Stab.	$J = \frac{1}{3} m \cdot l^2$
i) 	Eine Kugelschale, die um den Mittelpunkt rotiert, für eine Wandstärke $d \ll r$.	$J = \frac{2}{3} m \cdot r^2$
j) 	Eine massive Kugel, die um den Mittelpunkt rotiert.	$J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$
k) 	Ein Quader, der um eine Achse rotiert, die durch seinen Schwerpunkt verläuft und parallel zu einer seiner Kanten liegt.	$J = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$
	Ein Quader, der um eine Achse rotiert, die durch den Mittelpunkt einer Randfläche unter einem Winkel α bezüglich der Achse senkrecht durch diese Fläche geht. Die Fläche ac ist dabei immer parallel zur Rotationsachse!	$J = \frac{1}{12} m \cdot \left(4a^2 \sin^2 \alpha + b^2 + 3ac \sin \alpha \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha\right)$
	Ein massiver Kegel, der um seine Achse rotiert.	$J = \frac{3}{10} m \cdot r^2$
	Ein massiver Kegelstumpf, der um seine Achse rotiert.	$J = \frac{3}{10} m \cdot \frac{(R^5 - r^5)}{(R^3 - r^3)}$
	Eine vierseitige, regelmäßige Pyramide, die um ihre Symmetrieachse rotiert.	$J = \frac{1}{5} m \cdot r^2 = \frac{1}{10} m l^2$

Beispielrechnung: Trägheitsmoment der homogenen Vollkugel

Zum Verständnis dieses Abschnittes sind grundlegende Kenntnisse der Integralrechnung und Koordinatentransformation hilfreich.

Um das Trägheitsmoment einer massiven homogenen Kugel bezüglich einer Drehachse durch den Kugelmittelpunkt zu berechnen, wird das im Abschnitt „Berechnung“ angegebene Integral verwendet. Der Einfachheit halber soll der Kugelmittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems liegen und die Drehachse entlang der z -Achse verlaufen. Um das Integral

$$J = \rho \int_V (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}V$$

auszuwerten, empfiehlt es sich statt kartesischen lieber Kugelkoordinaten zu verwenden. Beim Übergang müssen dabei die kartesischen Koordinaten *x, y, z* und das Volumenelement d*V* durch die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ ausgedrückt werden. Das geschieht mithilfe der Ersetzungsregeln

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

und der Funktionaldeterminanten

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Einsetzen in den Ausdruck für das Trägheitsmoment liefert

$$J = \rho \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \;\; r^4 \sin^3\vartheta$$

Hier zeigt sich der Vorteil der Kugelkoordinaten: Die Integralgrenzen hängen nicht voneinander ab. Die beiden Integrationen über *r* und φ lassen sich daher elementar ausführen. Das verbleibende Integral in

$$J = \frac{2}{5}\pi\rho R^5 \int_0^\pi \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$

kann durch partielle Integration mit

$$u = \sin^2\vartheta$$
$$v' = \sin\vartheta$$

gelöst werden:

$$\int_0^\pi \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{4}{3}.$$

Für das Trägheitsmoment ergibt sich schließlich:

$$J = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}\rho V R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

Experimentelle Bestimmung

Zur Messung eines Trägheitsmoments eines Körpers verwendet man einen Drehtisch. Dieser besteht aus einer Kreisscheibe, die um ihre Symmetrieachse drehbar ist und einer Schneckenfeder. Sie bewirkt bei einer Drehung der Scheibe ein rücktreibendes Drehmoment D , das direkt proportional zum Auslenkwinkel φ ist: $D = -D_r\varphi$. Die Proportionalitätskonstante D_r nennt man Direktionsmoment oder Richtmoment. Ihr Wert hängt von der Stärke der Feder ab. Die Scheibe führt nun harmonische Schwingungen mit der Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{D_r}},$$

aus, wobei J_0 das Trägheitsmoment der Scheibe ist. Legt man nun zusätzlich einen Körper mit bekanntem Trägheitsmoment J_1 auf die Scheibe, so ändert sich die Schwingungsdauer zu

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J_1}{D_r}}.$$

Aus der Differenz

$$T_1^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_1}{D_r}$$

lässt sich das Direktionsmoment D_r des Drehtisches bestimmen und aus obiger Formel für T_0 erhält man dann das Trägheitsmoment J_0 des Drehtisches. Legt man nun einen beliebigen Körper auf den Drehtisch, so kann man sein Trägheitsmoment J bezüglich der Rotationsachse aus der gemessenen Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J}{D_r}}$$

berechnen.

Siehe auch

- Flächenträgheitsmoment, Kreisel

Literatur

- Paul A. Tipler: *Physik*. 3. korrigierter Nachdruck der 1. Auflage 1994, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg Berlin, 2000, ISBN 3-86025-122-8
- Ernst W. Otten: *Repetitorium Experimentalphysik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998, ISBN 3-540-62987-4
- Torsten Fließbach: *Mechanik*. 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1999, ISBN 3-8274-0546-7
- Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko: *Classical mechanics*. International Edition, 3. Auflage, Pearson/Addison Wesley, Upper Saddle River, N.J., 2002, ISBN 0-321-18897-7

Weblinks

- Trägheitsmomente geometrischer Körper bei Matheplanet [2] – Anleitungen zum Berechnen diverser Trägheitsmomente mit Beispielen.
- Interaktives Java-Applet mit 3D-Visualisierung [3] – Näherung der Trägheitsmomente frei definierbarer Körper mit diversen Beispielen.

Referenzen

[1] NASA Earth Fact Sheet (http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)
[2] http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=851
[3] http://www.settleback.de/applets/traegheitsmoment/

Quelle(n) und Bearbeiter des/der Artikel(s)

Trägheitsmoment *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=71610499 *Bearbeiter*: -oo-, 1-1111, ADDbro, Achim Raschka, Aka, Allen McC., Amos12345, Birger Fricke, Black Cherubin, Boehm, Boemmels, BroyJoerg, BuSchu, Burnme, CWitte, CaBiN, Ce2, Challe, Cottbus, D, D-kw, DerHexer, Engie, Entlinkt, Farino, Florian, FranzXf, Fuenfundachtzig, G, G-C, GDK, Geof, Georg Stillfried, GeorgeKaplan, Hadhuey, Head, Heikoschmitz, Hokanomono, Howwi, Hubi, Hugo4, Itu, Iwoelbern, Ixitixel, JCS, Jaellee, Jean Essaie, Jensel, Jkbw, Jodo, KaiMartin, Kevinol, Kixx, MLier, MaSt, Macks, Mapra, Marc van Woerkom, Marcnesello, MarkusII, Maulcrosoft, Nils, Nobelium, Olei, PDD, Pediadeep, PeeCee, Perk, Pfedelbacher, Physikphilosoph, Pingi, Prolineserver, Proxima, QCO, Raphael Frey, Ras al Ghul, RobbyBer, Schulzjo, Schusch, Sebastian42, SebastianKluge, Sheep dolly, Spektrum, StefanPohl, SteffenB, Studi111, Stw, Superplus, Synapse, Thomas.holzer, Tsor, Tubas, Uhr, Uwe Gille, W!B:, WAH, Weede, Wiegels, WikipediaMaster, Wo st 01, Wollschaf, Zaungast, Zwikki, °, Århus, 174 anonyme Bearbeitungen

Quelle(n), Lizenz(en) und Autor(en) des Bildes

Datei:Steiner Regel.svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Steiner_Regel.svg *Lizenz*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Bearbeiter*: User:Jensel

Datei:KOS.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:KOS.png *Lizenz*: unbekannt *Bearbeiter*: Mapra, Noddy93

Datei:Traegheit a punktmasse.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_a_punktmasse.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian at de.wikipedia

Datei:Traegheit b zylindermantel.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_b_zylindermantel.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian at de.wikipedia

Datei:Traegheit c vollzylinder.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_c_vollzylinder.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian at de.wikipedia

Datei:Traegheit d hohlzylinder2.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_d_hohlzylinder2.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Original uploader was FranzXf at de.wikipedia

Datei:Traegheit e vollzylinder_2.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_e_vollzylinder_2.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian at de.wikipedia

Datei:Traegheit f zylindermantel_2.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_f_zylindermantel_2.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian at de.wikipedia

Datei:Traegheit g stab1.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_g_stab1.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian at de.wikipedia

Datei:Traegheit h stab2.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_h_stab2.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian at de.wikipedia

Datei:Traegheit i kugel1.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_i_kugel1.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian at de.wikipedia

Datei:Traegheit j kugel1.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_j_kugel1.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian Nolz at de.wikipedia

Datei:Traegheit k quader.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_k_quader.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Florian at de.wikipedia

Datei:Traegheit_l_quader2.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Traegheit_l_quader2.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Sheep dolly

Datei:Cone_(geometry).svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Cone_(geometry).svg *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: User:Louperivois

Datei:Truncated_cone.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Truncated_cone.png *Lizenz*: Public Domain *Bearbeiter*: Burn, EugeneZelenko, Nillerdk, Rovnet

Datei:Skizze_Pyramide.PNG *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Skizze_Pyramide.PNG *Lizenz*: unbekannt *Bearbeiter*: BroyJoerg

Lizenz

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.
The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.
The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.
A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".
Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.
The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.
A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.
The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.
You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.
If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.
If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.
It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- **A.** Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- **B.** List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- **C.** State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- **D.** Preserve all the copyright notices of the Document.
- **E.** Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- **F.** Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- **G.** Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- **H.** Include an unaltered copy of this License.
- **I.** Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- **J.** Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- **K.** For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- **L.** Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- **M.** Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- **N.** Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- **O.** Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.
You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties--for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.
You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.
The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.
The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.
In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.
You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.
If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.
If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.
Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright (c) YEAR YOUR NAME.
> Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document
> under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2
> or any later version published by the Free Software Foundation;
> with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts.
> A copy of the license is included in the section entitled
> "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this:

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the
> Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.
If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.